A.2.1 $y' + Py = q \qquad P, q \in C[0,+\infty)$

$\exists x_0 \geq 0,\ \exists \mu > 0 : P(x) \geq \mu,\ \forall x \geq x_0$

$\lim\limits_{x\to\infty} q(x) = 0$

$\rightsquigarrow \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0.$

Λύση: $y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds}\left[y(x_0) + \int_{x_0}^{x} q(s) e^{\int_{x_0}^{s} P(u)du} ds\right] =$

$x \geq x_0$

$$= \underbrace{e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds}\, y(x_0)}_{A(x)} + \underbrace{e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds} \int_{x_0}^{x} q(s)\, e^{\int_{x_0}^{s} P(u)du} ds}_{B(x)}$$

$x_0 \leq s \leq x$

$\mu \leq P(s)$

$\mu(x-x_0) = \int_{x_0}^{x} \mu\, ds \leq \int_{x_0}^{x} P(s)ds \Rightarrow e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds} \leq e^{-\mu(x-x_0)}$

άρα $0 \leq \underbrace{e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds}}_{\to 0} \leq e^{-\mu(x-x_0)} = e^{\mu x_0} \cdot \underbrace{e^{-\mu x}}_{\to 0}$

και άρα $e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds}\, y(x_0) \to 0$

αρκεί νδο $B \rightsquigarrow 0$

$$|B(x)| \leq \frac{\int_{x_0}^{x} |q(s)| e^{\int_{x_0}^{s} P(u)du} ds}{e^{\int_{x_0}^{x} P(s)ds}} \qquad e^{\int_{x_0}^{x} P(s)ds} \geq e^{\mu(x-x_0)} \to \infty \quad (*)$$

Η συνάρτηση στον αριθμητή είναι αύξουσα άρα το $\int$ (και μη αρνητική) > 0.

Δύο περιπτώσεις: (i) $b(x) = \int_{x_0}^{x} |q(s)| e^{\int_{x_0}^{s} P(u)du}$: φραγμένη

τότε η $b(x)$ είναι ↗ κ' φραγμένη άρα συγκλίνει σε πραγμ. αριθ.

επειδή $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\int_{x_0}^{x} P(s)ds} = +\infty$ (*) έπεται ότι

$\lim\limits_{x\to\infty} |B(x)| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} B(x) = 0$

ii) αν η $b(x)$ όχι άνω φραγμ. $\Rightarrow \lim\limits_{+\infty} b(x) = +\infty$

Οι συναρτ. $b(x)$ κ' $e^{\int_{x_0}^{x} P(s)ds}$ είναι παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$

(συν. συν/σεις μέσα σε ολοκλ.) $\xrightarrow{D.H.L.} \dfrac{[\ ]'}{[\ ]'} = \dfrac{|q(x)| \cancel{e^{\int_{x_0}^{x} P(u)du}}}{\cancel{e^{\int_{x_0}^{x} P(s)ds}}} \to 0$

διότι $\lim\limits_{x\to\infty} q(x) = 0$

άρα $\lim_{x\to\infty} |B(x)| = 0 \rightarrow \lim_{x\to\infty} B(x) = 0$.

15/10/15

Εφ. $y' + y\log\left(\frac{5}{2}+\sin x\right) = \frac{\cos x}{(x+1)^2}, x \geq 0$

Λύση: Παρατηρώ ότι εδώ έχουμε $P(x) = \log\left(\frac{5}{2}+\sin x\right), x\geq 0$
και $q(x) = \cos x/(x+1)^2, x \geq 0$

Είναι: $P(x) = \log\left(\frac{5}{2}+\sin x\right) \geq \log\left(\frac{5}{2}-1\right) = \log\frac{3}{2} \overset{\nearrow}{\geq} \log 1 = 0$

δηλ για $\mu = \log 3/2$ είναι $P(x) \geq \mu > 0$, $\forall x \geq x_0$

Είναι $|q(x)| = \left|\frac{\cos x}{(x+1)^2}\right| \leq \frac{1}{(x+1)^2} \rightarrow 0$

άρα $\lim |q(x)| = 0 \Rightarrow \lim q(x) = 0$ και οι υποθ. της προηγ. άσκησης ισχύουν για τις P κ' q ...

ΘΕΜΑ ΙΟΥΝΙΟΥ: $y' + 2y = q(x)$, $q(x) = \begin{cases} 1-|x|, & x \leq 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$

$\rightarrow$ ∃ λύσης εκτός σταθ. στο $[0,+\infty)$?

ii) $y > 0$ να εξ. αν ∃ φραγμ. λύσης στο $(0,+\infty)$
— — $\mathbb{R}$.

A-16 A-27 Ασκήσεις

i) ... μία αρνητική σταθ.

ii) $y(x) = -\int_{x_0}^{x} b(s)\exp\left[\int_x^s \alpha(t)\,dt\right] ds, x \geq 0.$

(E) $y' + P(x)y = q(x)$

Bernulli : $y' + \alpha(x)y = b(x)\cdot y^r$ (Μη γραμμική $\forall r \geq 2$)

$\rightsquigarrow z = y^{1-r}$

$\rightsquigarrow z' + (1-r)\,\alpha(x)\,z = (1-r)\,b(x)$

Παραδ. 2 σελ. 33

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{2y}, \quad y(-1) = 2$$

Εδώ $r = -1 \Rightarrow z = y^2 \Rightarrow z' = 2yy'$

άρα $\boxed{z' - \frac{2}{x}z = -1}$, $x<0$

άρα $z(x) = e^{-\int_{-1}^{x}\left(-\frac{2}{s}\right)ds}\left[y(-1) + \int_{-1}^{x}(-1)\cdot e^{\int_{-1}^{s}\left(-\frac{2}{u}\right)du}\,ds\right] =$

$= e^{2\ln|s|\,\big|_{-1}^{x}}\left[2 - \int_{-1}^{x} e^{-2\ln|u|\,\big|_{-1}^{s}}\,ds\right] \Rightarrow \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow z(x) = \ldots \Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{z(x)} = \pm\sqrt{5x^2+x}$
Επειδή $y(-1) = +2$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = \sqrt{5x^2+x}}$, $x<0$ όμως $\boxed{x < -\frac{1}{5}}$

Ασκ. 6i) σελ. 37

$(x-1)y' - 3y = (x-1)^5$, $y(-1) = 6$.

πρέπει $x<1$ για να είναι $x-1 \neq 0$ και $-1 \in D_y$.

$t = x-1$ άρα $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\underbrace{\frac{dt}{dx}}_{=1} = \frac{dy}{dt}$ $\longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} ty' - 3y = t^5 \\ y(-2) = 6 \end{array}\right| \Rightarrow$$ ~~Bernulli με r=5~~

~~άρα z = y^{1-5} = y^{-4}~~

$$y(x) = -4(x-1)^3 + \frac{(x-1)^5}{2}.$$

(A.8)

Άσκηση: $y' + x + y + 1 = (x+y)^2 e^{2x}$, $y(0) = 1$.

$z = x + y \Rightarrow z' = 1 + y'$

άρα $z' + z = z^2 e^{2x} = (\underbrace{ze^x}_{u})^2$

Bernulli: $r = +2 \Rightarrow z = y^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{z' = -\frac{y'}{y^2}}$$

Εξίσωση Riccati: $y' + \alpha(x)y + b(x)y^2 + d(x) = 0$

- Αν $d(x) = 0 \Rightarrow$ Bernulli
- Αν $b(x) = 0 \Rightarrow$ Γραμμική.

⇝ Αν y_1 μερική λύση (: συγκεκριμένη από το σύνολο των λύσεων).

Μετασχ. $z = \frac{1}{y - y_1} \Leftrightarrow \boxed{y = y_1 + \frac{1}{z}}$

άρα $y' = y_1' + \left(-\frac{z'}{z^2}\right)$

άρα $$y_1' - \frac{z'}{z^2} + \alpha(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + b(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 + d(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_1' - \frac{z'}{z^2} + \alpha(x)y_1 + \alpha(x)\frac{1}{z} + b(x)y_1^2 + b(x)\cdot\frac{1}{z^2} + b(x)\frac{2}{z}y_1 + d(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{[y_1' + \alpha(x)y_1 + b(x)y_1^2 + d(x)]}_{=0} + \alpha(x)\cdot\frac{1}{z} - \frac{z'}{z^2} + b(x)\frac{1}{z^2} + b(x)\cdot\frac{2y_1}{z} = 0 \Leftrightarrow$$

y_1 λύση

$$\overset{\cdot z^2}{\Leftrightarrow} \boxed{-z' + \alpha_1(x)z + b(x) + 2b(x)y_1 z = 0}$$